# Exercice N°6

**1-/** Soit la fonction **f** définie sur [ **0** , **1** [ par **f ( x ) =** $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit ( $\mathscr{C}$ ) sa courbe représentative de un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

**a-)** Etudier la dérivabilité de **f** à droite en **0** .Interprétation géométrique ?

**b-)** Dresser le tableau de variation de **f**.

**c-)** Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$

**d-)** Montrer que pour **x** de $[0,+\infty[$ ; $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

**e-)** Tracer ( $\mathscr{C}$ ) et ( $\mathscr{C}$' ) courbe de la fonction $f^{-1}$ dans le même repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .

**2-/**Soit **A** l'aire du domaine limité par la courbe ( $\mathscr{C}$ ) et les droites d'équations respectives :

**x=0** et **y=1**. Montrer que **A=** $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}$ **dx** .

**3-/**On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **IN** par $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

**a-)** Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

**b-)** Prouver que la suite est convergente.

**c-)**Montrer que pour tout **n** de **IN** ,**0**$\leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$ , puis déduire la limite de la suite.

**4-/** On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur **IN** par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}$

**a-)**Montrer que $1 - t^2 + t^4 + \ldots\ldots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

**b-)**En intégrant l'égalité précédente montrer que ∀**n** de **IN**; $v_n - I = (-1)^n u_n$. où $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

**c-)**Montrer que $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire la laimite de la suite $(v_n)_n$

**d-)**Calculer $v_3$ puis donner une valeur approchée de **I**